

具有紧支撑的正交小波变换滤波器的设计原理和一种图像精确分解与重构算法

魏海涛, 郑南宁, 张志华
(西安交通大学人工智能与机器人研究所, 西安 710049)

摘 要: 本文通过从一个新的角度研究了 Daubechies 滤波器的设计原理, 得到了具有紧支撑的正交小波变换滤波器设计的两个理论依据, 由此构造了一种图像的精确分解与重构算法. 该算法非常简单易行, 并且与 Daubechies 滤波器的设计原理是一致的. 实验结果表明本文提出的算法能达到无失真的重构.

关键词: 正交小波变换; Daubechies 滤波器; 重构滤波器; 图像处理

中图分类号: TN911.73 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2000) 10-0017-03

Orthogonal Wavelet Transform with Compact Support Filter Design Method and an Algorithm of Image Perfect Decomposition and Reconstruction

WEI Hai-tao, ZHENG Nan-ning, ZHANG Zhi-hua
(Institute of Artificial Intelligence and Robotics, Xian Jiaotong Univ., Xi'an 710049, China)

Abstract: In this paper, a novel method to design the Daubechies filter is introduced. Based on this, an algorithm of the image perfect decomposition and reconstruction is proposed. In fact, for orthogonal wavelet transform, the padding approach to the boundary condition is periodic. The approach is derived from the design method of Daubechies filter. When the signal length is more than the length of the filter, the signal can be decomposed and reconstructed perfectly.

Key words: orthogonal wavelet transform; daubechies filter; reconstruction filter; image processing

1 引言

小波变换的应用研究是与小波变换理论研究紧密结合在一起的^[1]. 数字信号处理中一个重要组成部分就是信号的精确分解与重构. 基于小波分析的完美重构滤波器的设计是小波分析理论与应用的一个重要方向^[1-3]. 例如, 最近几年发展起来的数字水印技术中, 有一类水印嵌入方法是附加水印信息在图像小波变换系数上, 以检测图像的非授权使用^[4]. 由于小波变换与人类视觉系统的多通道模型相匹配, 利用完美重构滤波器可以更好地在嵌入水印的不可感知性和稳健性之间取得平衡.

本文首先从一个新的角度研究了 Daubechies 滤波器的设计原理, 得到了具有紧支撑的正交小波变换滤波器设计的两个理论依据, 在此基础上, 构造了一种图像的精确分解与重构算法. 同时本文发现文献[3]中的方法是进行零延拓, 重构时需要利用正交化过程来调整滤波器系数, 以达到无失真恢复的目的. 本文的算法则无需此过程, 故降低了计算复杂度, 并且与正交滤波器的设计原理更加吻合.

2 具有紧支撑的正交小波滤波器设计原理

关于多分辨分析的内容, 可参见文[5]~[8]. 这里, 本文只重点回顾一下多分辨分析空间 V_1 中的数字信号 $f(x)$ 分解到子空间 V_0 和正交补空间 W_0 的表达式:

$$f(x) = \sum_k u_k \phi(2x - k) = \sum_m v_m \phi(x - m) + \sum_n w_n \psi(x - n) \quad (1)$$

其中

$$v_m = \int f(x) \phi(x - m) dx = \int \bar{h}_1 u_{2m+l} dx \quad (2)$$

$$w_n = \int f(x) \psi(x - n) dx = \int \bar{g}_1 u_{2n+l} dx \quad (3)$$

$$g_n = (-1)^n \bar{h}_{1-n} \quad (4)$$

由 V_0 和 W_0 中的小波分解系数 v_m 和 w_n 重构 u_k 的表达式为:

$$u_k = \sum_m v_m h_{k-2m} + \sum_n w_n g_{k-2n}$$

通常对于数字信号的分解与重构可以视为对 $\{u_k\}_k$ 的分解和重构, 其中 $\{u_k\}_k$ 代表了数字信号 $f(x)$ 在不同位置的采样值.

别对应了低通和高通滤波器,它们构成一对子带编码中常用的正交镜像滤波器 (Quadrature Mirror Filter)^[12].

例 当 $N=3$ 时,方程组的解为:

$$\begin{aligned} h_0 &= (1 + \sqrt{10} + \sqrt{5+2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \\ h_1 &= (5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5+2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \\ h_2 &= (10 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5+2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \\ h_3 &= (10 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5+2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \\ h_4 &= (5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5+2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \\ h_5 &= (1 + \sqrt{10} - \sqrt{5+2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \end{aligned}$$

经验证,这组滤波器系数满足条件(7)和(10),并且形成的分解矩阵是酉阵.因此,这组滤波器系数构成完美重构滤波器.

根据上面的分析,可以得到两点结论:

(1) 具有紧支撑的正交小波变换滤波器 $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 所应满足的条件为:

$$\sum_{n=0}^{2N-1} h_n \bar{h}_{n-2k} = 0, k (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (11)$$

$$\sum_{n=0}^{2N-1} (-1)^n h_{2N-n} n^j = 0 (j=0, 1, \dots, N-1) \quad (12)$$

(2) 具有紧支撑的正交小波变换滤波器适用于周期延拓的边界条件.这一点从滤波器的构造过程就可得知,周期延拓以后形成酉阵 A,进一步通过求解由式(7)、(10)组成的方程组得到 $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

3 图像的精确分解与重构算法和实验分析

为了验证本文的观点,应用 Mallat 的二维多分辨分析及其金字塔算法^[13],构造基于正交小波变换的图像精确分解与重构算法:图像矩阵记为 $U_L \times L$,分解用的滤波器组成的矩阵记为 $A_L \times L$,重分解的结果记为矩阵 $V_L \times L$.那么,分解与重构算法可以表示为,分解: $V = A(AU^T)^T = AUA^T$,重构: $U = A^{-1}V(A^T)^{-1} = A^TVA$, $A_L \times L$ 左乘相当于对图像的列做一维小波变换, $A_L \times L$ 右乘相当于对图像的行做一维小波变换.

这里利用第二节算出的滤波器系数对 Lena (512 * 512 * 8 位) 图像进行二重分解与重构(图 1),所得的重构图与原图的 PSNR 值为无穷大.

从本文的算法中可以发现,重构用的滤波器矩阵就是 A 的转置.与文[3]中的无失真算法相比,本文的算法重构时无须对滤波器进行正交化过程,分解和重构用的滤波器系数是完全一样的,降低了计算复杂度.基于 Daubechies 滤波器的设计原理,本文提出的算法同样可以达到对信号进行精确分解



图 1 Lena 图像的二重分解与重构示意图 (其中,细节系数进行了线性拉伸)

和重构的目的.

4 结论

本文首先从一个崭新的角度研究了 Daubechies 滤波器的设计原理,得到了设计具有紧支撑的正交小波变换滤波器设计的两个理论依据,在此基础上,构造了一种图像的精确分解与重构算法.把本文提出的算法应用到像数字水印等具体实际问题中是今后需要进一步研究的一个方向.

附录

式(6) $x^j \bar{\phi}(x) dx = 0 (j=0, 1, \dots)$ 成立条件 $\sum_n \bar{g}_n n^j = 0 (j=0, 1, \dots)$ 的推导:

证明:

由关于 $\phi(x)$ 的双尺度方程 $\phi(x) = \sum_n \bar{g}_n \phi(2x-n)$, 两边关于 $\phi(x)$ 作内积

$$\int x^j \bar{\phi}(x) dx = \int x^j \sum_n \bar{g}_n \bar{\phi}(2x-n) dx = \sum_n \bar{g}_n \int \bar{\phi}(x) \left(\frac{x+n}{2}\right)^j dx$$

下面采取数学归纳法来证明

(1) 当 $j=0$ 时

$$\sum_n \bar{g}_n \int \bar{\phi}(x) \left(\frac{x+n}{2}\right)^j dx = \sum_n \bar{g}_n \int \bar{\phi}(x) dx = \sum_n \bar{g}_n \int \bar{\phi}(x) dx = 0$$

所以 $\sum_n \bar{g}_n n^0 = 0$.

原命题成立.

(2) 假设当 $j=1, \dots, N-1$ 时原命题成立. 那么当 $j=N$ 时

$$\begin{aligned} & \sum_n \bar{g}_n \int \bar{\phi}(x) \left(\frac{x+n}{2}\right)^N dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{g}_n C_N n^{N-i} \int \bar{\phi}(x) x^i dx + \sum_n \bar{g}_n C_N n^N \int \bar{\phi}(x) dx \end{aligned}$$

显然前一项已经为 0, 为了使得后一项为 0, 则只需要 $\sum_n \bar{g}_n n^N = 0$.

证毕.

作者简介:



魏海涛 1997年毕业于西安交通大学理学院应用数学系.现攻读西安交通大学人工智能与机器人研究所模式识别与智能系统专业研究生.主要研究兴趣是小波变换、数据编码和数字水印.



郑南宁 教授、博导、中国工程院院士.1985年3月获日本庆应大学工学博士学位.研究领域包括智能系统与模式识别、机器视觉与图像处理、神经网络.

(下转第 8 页)

下面利用上述算法, 针对 A_1 的不同取值进行仿真分析.

考虑同步 DS/CDMA 系统, 用户数 $K=5$, 处理增益 $N=10$. 用户 1 为所需检测的信号, 其余用户为多址干扰, 干扰强度: $MAI_k = 10\log_{10}(A_k^2/A_1^2) = 20\text{dB}$, $k=2\sim 5$. 信道干扰为高斯白噪声, 信噪比 $SNR_1 = 10\log_{10}(A_1^2/\sigma^2) = 20\text{dB}$. 针对 A_1 的不同取值所得仿真结果如图 1 所示, 图中曲线表示 CM 检测器的输出信干比:

$$SIR_1(n) = E^2\{w(n)^T r\} / \text{Var}\{w(n)^T r\} \quad (18)$$

图 1 表明当 $A_1 = 0.4$ 时, CM 检测器的输出信干比成下降趋势, 此时检测器抑制多址干扰的能力较差. 当 $A_1 = 1/\sqrt{3} = 0.5774$ 为临界值时, CM 检测器具有抑制多址干扰的能力; 而当 $A_1 = 1$ 时, 检测器具有较强的干扰抑制能力. 仿真结果验证了结论 2.

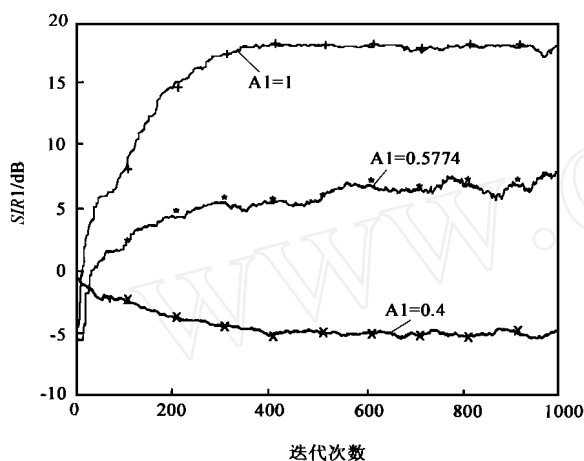


图 1 CM 检测器的输出信干比

5 结论

本文分析了常数模方法抑制多址干扰的能力. 得出本文的主要结论: 当解调信号的接收幅值小于临界值 $1/\sqrt{3}$ 时, 常数模方法抑制多址干扰的能力较差; 相反, 则具有较强的

多址干扰抑制能力. 同时指出并纠正了文献 [5] 中的错误. 仿真分析验证了本文的结论. 本文的讨论仅限于高斯信道, 对于衰落信道可作类似分析, 还有待研究.

参考文献:

- [1] Verdu S. Multiuser Detection [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998.
- [2] Honig M, Madhoo U, Verdu S. Blind adaptive multiuser detection [J]. IEEE Trans Information Theory, 1995, 41(4): 944 - 960.
- [3] Madhoo U. Blind adaptive interference suppression for direct-sequence CDMA [C]. Proceedings of the IEEE, 1998, 86(10): 2049 - 2069.
- [4] Johnson C, Schniter P, Endres T, Behm J, Brown D and Casas R. Blind equalization using the constant modulus criterion: A review [C]. Proceedings of the IEEE, 1998, 86(10): 1927 - 1950.
- [5] Míguez J, Castedo L. A linearly constrained constant modulus approach to blind adaptive multiuser interference suppression [J]. IEEE Communications Letters, 1998, 2(8): 217 - 219.

作者简介:



徐长江 1965 年生, 副教授, 博士, 目前主要研究兴趣为系统辨识、信号检测与估计、CDMA 个人通信技术.



颜广增 1943 年生, 教授, 主要从事卫星移动通信、无线个人通信的教学与科研工作.

(上接第 19 页)

参考文献:

- [1] M. Vetterli, C. Herley. Wavelets and filter banks: Theory and design [J]. IEEE Trans. on Signal Process, 1992, 40(9): 2207 - 2232.
- [2] S. Schweid, T. K. Sarkar. Projection minimization techniques for orthogonal QMF Filters with vanishing moment [J]. IEEE Trans. on Circuits System, 1995, 42(11): 694 - 701.
- [3] 唐金山, 蔡安妮, 孙景鳌. 正交小波变换中边界的零延拓及其失真恢复 [J]. 电子学报, 1999, 27(1): 89 - 92.
- [4] M. M. Yeung, B. Yeo, M. Holliman. Digital watermarks: shedding light on the invisible [J]. IEEE Micro, 1998, 18(6): 32 - 41.
- [5] 程正兴. 小波分析算法与应用 [M]. 西安交通大学出版社, 1998.
- [6] 刘贵忠, 邱双亮. 小波分析及其应用 [M]. 西安电子科技大学出版社, 1997.
- [7] 崔锦泰著, 程正兴译. 小波分析导论 [M]. 西安交通大学出版社, 1995.
- [8] 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析 [M]. 西安电子科技大学出版社, 1992.
- [9] S. Mallat and S. Zhong. Characterization of signals from multiscale edges [J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(7): 710 - 732.
- [10] Michael L. Hilton, Brian D. Jawerth, Ayan Sengupta. Compression still and moving images with wavelets [EB]. ftp://ftp.math.sc.edu/pub/wavelet/papers/varia/tutorial. 1994, 4, 18
- [11] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly support wavelets [J]. Commun. Pure Appl. Math., 1988, 41: 909 - 996.
- [12] 中国通信学会主编. 数字通信工程 [M]. 人民邮电出版社, 1996.
- [13] S. Mallat. Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models [J]. IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal processing, 1989, 37(12): 2091 - 2110.